Άσκηση 1: $\left((n+1)! = 1 \cdot 2 \dots n(n+1) = n!(n+1) \right)$ 13/11/17

Θέλω ν.δ.ο. $\forall n \in \mathbb{Z}^* \quad n! \leq n^n$

Λύση: • για $n=1 \quad 1! = 1 \leq 1^1$ ισχύει

• Έστω ότι ισχύει για $n \geq 1$, $n! \leq n^n$

• Θ.ν.δ.ο. ισχύει για $n+1$

$$(n+1)! \leq (n+1)^{n+1}$$

Δηλ. $(n+1)! = n!(n+1) \leq n^n(n+1) \leq (n+1)^n(n+1) \leq (n+1)^{n+1}$

(αφού $n < n+1$)

Άρα $\forall n \geq 1 \quad n! \leq n^n$

Άσκηση 3: Δ.Ο. $\exists N \in \mathbb{Z}^+$ τ.ω. $2^n > n^3 \quad \forall n \geq N$

• Για $n=1 \quad 2^1 = 2 > 1 = 1^3$

• Για $n=2 \quad 2^2 = 4 < 8 = 2^3$

• Για $n=3 \quad 2^3 = 8 < 27 = 3^3$

• Για $n=4 \quad 2^4 = 16 < 64 = 4^3$

$\vdots$

• Για $n=10 \quad 2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$

Θ.α.ο. η ζητούμενη ανισότητα $2^n > n^3 \ \forall n \geq 10$ με χρήση της Α.Μ.Ε.

• Επαγωγική υπόθεση: Για $n > 10$ υποθέτουμε ότι $2^n > n^3$

Θ.δ.ο. ισχύει για $n+1$

Αρκεί ν.δ.ο. $2^{n+1} \geq (n+1)^3$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$f(x) = 2x^3 - (x+1)^3$

$f'(x) = 6x^2 - 3(x+1)^2 = 6x^2 - 3(x^2 + 2x + 1) = 3x^2 - 6x - 3$

$= 3(x^2 - 2x - 1) = 3((x-1)^2 - 2) \quad f \nearrow \quad x \in [3, +\infty)$

① Άρα $\forall x \geq 10$ έπεται ότι $f(x) > f(10) = 669 > 0$

Scanned by CamScanner

Θεώρημα: Έστω $a = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$ η πρωτογενής ανάλυση ενός φυσικού αριθμού $a > 1$. Ο φυσικός δ είναι διαιρέτης του a αν-ν $\delta = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}$ όπου $0 \leq \delta_i \leq a_i$

Απόδειξη: $a > 1$, $a \in \mathbb{N}$

$a = q_1 \cdots q_k = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$, $0 < a_i$, $p_i \neq p_j$ αν $i \neq j$
πρωτογενής ανάλυση του a

$(\Rightarrow)$ $\delta | a$

1^{η} περίπτωση: $\delta = 1 = p_1^0 p_2^0 \cdots p_s^0$

2^{η} περίπτωση: $\delta > 1$. Έστω p πρώτος διαιρέτης του δ
τότε $p | \delta$ $\delta | a \Rightarrow p | a \Rightarrow p | p_i$ για κάποιο $1 \leq i \leq s$
$\Rightarrow p = p_i$

Άρα $\delta = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}$ όπου $0 \leq \delta_i$

$\delta | a \Rightarrow a = \delta \cdot \gamma$ $\gamma | a$ κάποιο $\gamma \in \mathbb{N}$

$\gamma | a \Rightarrow \gamma = p_1^{\gamma_1} \cdots p_s^{\gamma_s}$ $0 \leq \gamma_i$

$p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} = a = \delta \cdot \gamma = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s} p_1^{\gamma_1} \cdots p_1^{\gamma_s} =$
$p_1^{\delta_1+\gamma_1} \cdots p_s^{\delta_s+\gamma_s}$

Από Θεμελιώδες Θεώρημα Αριθμητικής

$a_1 = \delta_1 + \gamma_1, \ldots, a_s = \delta_s + \gamma_s$

$0 \leq \delta_1 \leq \delta_1 + \gamma_1 = a_1 \Rightarrow 0 \leq \delta_1 \leq a_1$

Επίσης $0 \leq \delta_s \leq \delta_s + \gamma_s = a_s \Rightarrow 0 \leq \delta_s \leq a_s$

$(\Leftarrow)$ $\delta = p_1^{\delta_1} \cdots p_s^{\delta_s}$ $0 \leq \delta_i \leq a_i$

$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s} = p_1^{\delta_1} \cdot p_1^{a_1-\delta_1} \cdot p_2^{\delta_2} \cdot p_2^{a_2-\delta_2} \cdots p_s^{\delta_s} p_s^{a_s-\delta_s}$

$= p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_s^{\delta_s} p_1^{a_1-\delta_1} p_2^{a_2-\delta_2} \cdots p_s^{a_s-\delta_s} =$

$= \delta \, p_1^{a_1-\delta_1} p_2^{a_2-\delta_2} \cdots p_s^{a_s-\delta_s} =$

$= \delta \, p_1^{a_1-\delta_1} \cdot p_2^{a_2-\delta_2} \cdots p_s^{a_s-\delta_s} \Rightarrow \delta | a$

Scanned by CamScanner

Παράδειγμα: Βρείτε όλους τους φυσικούς διαιρέτες των αριθμών 81 και 28.

Λύση: $\cdot\ 81 = 3 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 9 = 3^4$

Αν $\delta / 3^4$ τότε $\delta = 3^{\delta_1}$, $0 \leq \delta_1 \leq 4$

$\{3^0 = 1, 3^1 = 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81\}$

$\cdot\ 28 = 2 \cdot 14 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$

Αν $\delta | 2^2 \cdot 7 \Rightarrow \delta | 2^{\delta_1} \cdot 7^{\delta_2}$ $\quad 0 \leq \delta_1 \leq 2$

$0 \leq \delta_2 \leq 1$

Το σύνολο των φυσικών διαιρετών του 28 είναι:

$\{2^0 \cdot 7^0, 2^0 \cdot 7^1, 2^1 \cdot 7^0, 2^1 \cdot 7^1, 2^2 \cdot 7^0, 2^2 \cdot 7^1\}$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 7 \quad 2 \quad 14 \quad 4 \quad 28$

Ερώτημα: Αν $\delta | a$, τότε $\delta = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_s^{\delta_s}$, $0 \leq \delta_1 \leq a_1$

$0 \leq \delta_2 \leq a_2$

$\vdots$

$0 \leq \delta_s \leq a_s$

Πόσοι είναι οι φυσικοί διαιρέτες του a;

Είναι $T(a) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)$

$T(a)$ συμβολίζει το πλήθος των φυσ. διαιρετών του a.

Αν $a = 1 \Rightarrow T(1) = 1$

Αν $a > 1$ κ' $a = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s}$

Τότε το $T(a) = (a_1+1)(a_2+1)\dots(a_s+1)$

$T(1000) = T(10^3) = T(2^3 \cdot 5^3) = (3+1)(3+1) = 16$

Scanned by CamScanner

Ορισμός: Μια ακέραιη συνάρτηση αριθμητική πολλαπλασιαστική συνάρτηση αν : i) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

ii) Αν $\mu.\kappa.\delta.(m,n)=1$, τότε $f(mn) = f(m)\cdot f(n)$

iii) $f(1)=1$

Παράδειγμα: i) $T: \mathbb{N} \to \mathbb{C}$

ii) $T(1)=1$

iii) $m=1$ τότε $\mu\kappa.\delta.(1,n)=1$ κ' $T(1\cdot n)=T(1)\cdot T(n)$

Όμοια αν $n=1$ με $\mu.\kappa.\delta.(m,n)=1$

Έστω $m>1$ και $n>1$ τότε $m=p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$ κ' $n=q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_t^{n_t}$ όπου $q_i \neq p_j$

$T(m)=(m_1+1)(m_2+1)\dots(m_s+1)$

$T(n)=(n_1+1)(n_2+1)\dots(n_t+1)$

$T(mn)=T(p_1^{m_1}\dots p_s^{m_s}\cdot q_1^{n_1}\dots q_t^{n_t})=$

$=(m_1+1)\dots(m_s+1)(n_1+1)\dots(n_t+1)=T(m)T(n)$

π.χ. $16=T(1000)=T(10\cdot 100)\neq T(10)\cdot T(100)=49$

$T(10)=T(2^1\cdot 5^1)=(1+1)(1+1)=4$

$T(100)=T(2^2\cdot 5^2)=(2+1)(2+1)=9$

Scanned by CamScanner